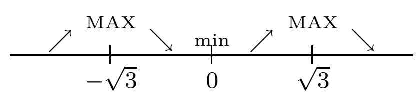
Lokální extrémy reálných funkcí jedné reálné proměnné

Postup: Budeme uvažovat funkce, které jsou spojité v každém bodě svého definičního oboru. Zadanou funkci $y = f(x)$ zderivujeme a derivaci upravíme na co nejednodušší tvar. Zásadně při úpravách preferujeme vytýkání a rozkládání na součin před roznásobováním závorek! Také se snažíme co nejvíce provádět krácení! Máme-li takto upravenou derivaci $y' = f'(x)$ (viz. příklady níže), určíme stacionární body (tj. body kde je derivace nulová) a body, kde derivace neexistuje. Tyto body, společně s body omezujícími definiční obor funkce $y = f(x)$ (jsou-li nějaké) vyneseme na reálnou osu. Tím se osa rozpadne na několik intervalů. Z každého intervalu vybereme jednoho reprezentanta a dosadíme do vzorce pro derivaci y' (není-li funkce na některém intervalu definována, přejdeme k dalšímu intervalu). Je-li hodnota takto získané derivace kladná, je kladná i v celém příslušném intervalu a funkce je na tomto intervalu rostoucí. Podobně, funkce je klesající na intervalu, kde je hodnota derivace záporná. Lokální extrém potom nastává v bodě, který patří do definičního oboru funkce $y = f(x)$ a ve kterém se mění charakter monotonosti, nebo v bodě, který je krajním bodem definičního oboru funkce, patří do definičního oboru a na příslušnou stranu od tohoto bodu je funkce rostoucí nebo klesající (viz. příklad s funkcí $y = \sqrt{2x - x^2}$).

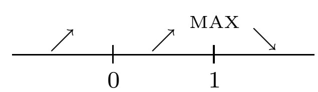
V následujících příkladech jsou naznačena řešení úloh na hledání lokálních extrémů. Je zde vypočtena derivace, naznačeno schema, ze kterého je zřejmé, kde je funkce rostoucí a klesající a vyznačeny body v nichž nastává lokální extrém.

Pozn.: podobná situace platí, zaměníme-li $f'(x)$ za $f''(x)$, slova rostoucí za konvexní, klesající za konkávní a lokální extrém za inflexní bod.

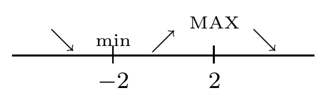
1. $y = -\frac{1}{9}x^4 + \frac{2}{3}x^2$ Nvod: $y' = -\frac{4}{9}x(x^2 - 3)$,



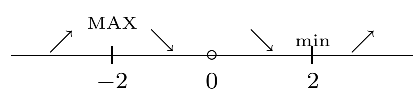
2. $y = 4x^3 - 3x^4$ Nvod: $y' = 12x^2(1 - x)$,



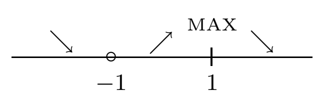
3. $y = -2 + 12x - x^3$ Nvod: $y' = 3(2 - x)(2 + x)$,



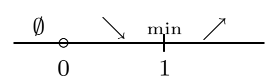
4. $y = x + \frac{4}{x}$ Nvod: $y' = \frac{(x-2)(x+2)}{x^2}$,



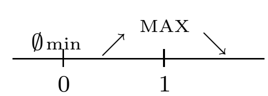
5. $y = \frac{x}{(x+1)^2}$ Nvod: $y' = \frac{1-x}{(x+1)^3}$,



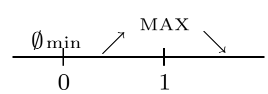
6. $y = x^2 - 2\ln x$ Nvod: $y' = 2\frac{(x-1)(x+1)}{x}$,



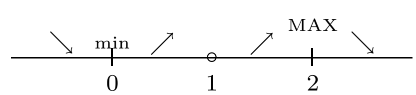
7. $y = (3 - x)\sqrt{x}$ Nvod: $y' = \frac{3}{2\sqrt{x}}(1 - x)$,



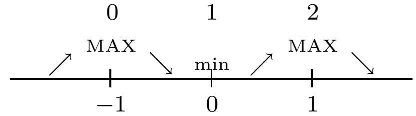
8. $y = 2\sqrt{x} - x$ Nvod: $y' = \frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$,



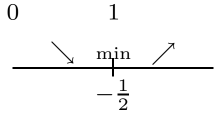
9. $y = \frac{x^2}{1-x}$ Nvod: $y' = \frac{x(2-x)}{(1-x)^2}$,



10. $y = 1 + x^2 - \frac{x^4}{2}$ Nvod: $y' = -2x(x - 1)(x + 1)$,



11. $y = \frac{x-2}{\sqrt{x^2+1}}$ Nvod: $y' = \frac{2x+1}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}$,



12. $y = \frac{x^2}{x^2+1}$ Nvod: $y' = \frac{2x}{(1+x^2)^2}$, $\searrow\ \underset{0}{\text{min}}\ \nearrow$

13. $y = \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2$ Nvod: $y' = -4\frac{x+1}{(x-1)^3}$, $\searrow\ \underset{-1}{\text{min}}\ \nearrow\ \underset{1}{\circ}\ \searrow$

14. $y = \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^4$ Nvod: $y' = -8\frac{(x+1)^3}{(x-1)^5}$, $\searrow\ \underset{-1}{\text{min}}\ \nearrow\ \underset{1}{\circ}\ \searrow$

15. $y = \sqrt[3]{2x^2 - x^3}$ Nvod: $y' = \frac{1}{3}\frac{4-3x}{\sqrt[3]{x(2-x)^2}}$, $\searrow\ \underset{0}{\text{min}}\ \nearrow\ \underset{\frac{4}{3}}{\text{MAX}}\ \searrow\ \underset{2}{|}\ \searrow$

16. $y = \frac{x}{1+x^2}$ Nvod: $y' = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$, $\searrow\ \underset{-1}{\text{min}}\ \nearrow\ \underset{1}{\text{MAX}}\ \searrow$

17. $y = \frac{1-x^3}{x^2}$ Nvod: $y' = -\frac{x^3+2}{x^3}$, $\searrow\ \underset{-\sqrt[3]{2}}{\text{min}}\ \nearrow\ \underset{0}{\circ}\ \searrow$

18. $y = \frac{1+x^2}{1-x^2} = -1 + \frac{2}{1-x^2}$ Nvod: $y' = \frac{4x}{(1-x^2)^2}$, $\searrow\ \underset{-1}{\circ}\ \searrow\ \underset{0}{\text{min}}\ \nearrow\ \underset{1}{\circ}\ \nearrow$

19. $y = \frac{\ln^2 x}{x}$ Nvod: $y' = \frac{\ln x(2-\ln x)}{x^2}$, $\emptyset\ \underset{0}{\circ}\ \searrow\ \underset{1}{\text{min}}\ \nearrow\ \underset{e^2}{\text{MAX}}\ \searrow$

20. $y = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$ Nvod: $y' = \frac{2-\ln x}{2x^{\frac{3}{2}}}$, $\emptyset\ \underset{0}{\circ}\ \nearrow\ \underset{e^2}{\text{MAX}}\ \searrow$

21. $y = \frac{e^x}{1+x}$ Nvod: $y' = \frac{xe^x}{(x+1)^2}$, $\searrow\ \underset{-1}{\circ}\ \searrow\ \underset{0}{\text{min}}\ \nearrow$

22. $y = x^{\frac{2}{3}}e^{-x}$ Nvod: $y' = e^{-x}\frac{2-3x}{3\sqrt[3]{x}}$, $\searrow\ \underset{0}{\text{min}}\ \nearrow\ \underset{\frac{2}{3}}{\text{MAX}}\ \searrow$

23. $y = x^2e^{-x}$ Nvod: $y' = e^{-x}x(2-x)$, $\searrow\ \underset{0}{\text{min}}\ \nearrow\ \underset{2}{\text{MAX}}\ \searrow$

24. $y = xe^{\frac{1}{x}}$ Nvod: $y' = e^{\frac{1}{x}}\frac{x-1}{x}$, $\nearrow\ \underset{0}{\circ}\ \searrow\ \underset{1}{\text{min}}\ \nearrow$

25. $y = \frac{x^2}{2} - \ln(1+x)$ Nvod: $y' = \frac{x^2+x-1}{x+1}$, $\emptyset\ \underset{-1}{\circ}\ \searrow\ \underset{-\frac{1+\sqrt{5}}{2}}{\text{min}}\ \nearrow$

26. $y = x - \ln(1+x^2)$ Nvod: $y' = \frac{(x-1)^2}{x^2+1}$, $\nearrow\ \underset{1}{|}\ \nearrow$

27. $y = e^{-x}\sin x$ Nvod: $y' = e^{-x}(\cos x - \sin x)$, $\underset{-\frac{3}{4}\pi}{\text{min}}\ \nearrow\ \underset{\frac{\pi}{4}}{\text{MAX}}\ \searrow\ \underset{\frac{5\pi}{4}}{\text{min}}\ \nearrow\ \underset{\frac{9}{4}\pi}{\text{MAX}}$ a 2π-periodicky

28. $y = x + \frac{2x}{1+x^2}$ Nvod: $y' = \frac{x^4+3}{(x^2+1)^2}$, $\nearrow$

29. $y = \frac{x^2}{2} + \frac{8}{x^3}$ Nvod: $y' = \frac{x^5-24}{x^4}$, $\searrow\ \underset{0}{\circ}\ \searrow\ \underset{\sqrt[5]{24}}{\text{min}}\ \nearrow$

30. $y = \sqrt{2x - x^2}$ Nvod: $y' = \frac{1-x}{\sqrt{x(2-x)}}$, $\emptyset\ \underset{0}{\text{min}}\ \nearrow\ \underset{1}{\text{MAX}}\ \searrow\ \underset{2}{\text{min}}\ \emptyset$

31. $y = (x+1)^{10}e^{-x}$ Nvod: $y' = e^{-x}(x+1)^9(9-x)$, $\searrow\ \underset{-1}{\text{min}}\ \nearrow\ \underset{9}{\text{MAX}}\ \searrow$

32. $y = \frac{x^2}{2^x}$ Nvod: $y' = \frac{x(2-x\ln 2)}{2^x}$,

$\searrow$	min	$\nearrow$	MAX	$\searrow$
	0		$\frac{2}{\ln 2}$	

Další funkce: $\frac{2x}{1+x^2}$**,** xe^{-x}**,** $x\sqrt[3]{x-1}$**,** $\frac{\sqrt{x}}{x+100}$**,** $\sqrt{x}\ln x$**,** $\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)$

Určete inflexní body a intervaly konvexnosti a konkávnosti

33. $y = xe^{-x}$ Nvod: $y'' = -e^{-x}(2-x)$,

$\cap$	in.	$\cup$
	2	

34. $y = \frac{2(x^2-x+1)}{(x-1)^2}$ Nvod: $y'' = 4\frac{x+2}{(x-1)^4}$,

$\cap$	in.	$\cup$		$\cup$
	-2		1	

35. $y = 1 + x^2 - \frac{x^4}{2}$ Nvod: $y'' = 2 - 6x^2$,

$\cap$	in.	$\cup$	in.	$\cap$
	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$		$\frac{\sqrt{3}}{3}$	

36. $y = \frac{x^3}{3-x^2}$ Nvod: $y'' = -6\frac{x(x^2+9)}{(x^2-3)^3}$,

$\cup$		$\cap$	in.	$\cup$		$\cap$
	$-\sqrt{3}$		0		$\sqrt{3}$	

37. $y = \frac{x^2+7}{x^2+3}$ Nvod: $y'' = 24\frac{(x-1)(x+1)}{(x^2+3)^3}$,

$\cup$	in.	$\cap$	in.	$\cup$
	-1		1	

38. $y = \frac{x}{x^2+1}$ Nvod: $y'' = 2\frac{x(x^2-3)}{(1+x^2)^3}$,

$\cap$	in.	$\cup$	in.	$\cap$	in.	$\cup$
	$-\sqrt{3}$		0		$\sqrt{3}$	

39. $y = x^2e^{x-2}$ Nvod: $y'' = (x^2+4x+2)e^{x-2}$,

$\cup$	in.	$\cap$	in.	$\cup$
	$-2-\sqrt{2}$		$-2+\sqrt{2}$	

40. $y = (x^2+1)e^{-x^2}$ Nvod: $y'' = 2x^2e^{-x^2}(2x^2-3)$,

$\cup$	in.	$\cap$		$\cap$	in.	$\cup$
	$-\sqrt{\frac{3}{2}}$		0		$\sqrt{\frac{3}{2}}$	

41. $y = \frac{e^x}{x+1}$ Nvod: $y'' = \frac{e^x(x^2+1)}{(x+1)^3}$,

$\cap$		$\cup$
	-1	

42. $y = \frac{x^3+2}{2x}$ Nvod: $y'' = \frac{x^3+2}{x^3}$,

$\cup$	in.	$\cap$		$\cup$
	$-\sqrt[3]{2}$		0	